Grundwissen 6. Klasse

1. Positive Brüche

a) Grundbegriffe

- Brüche haben die Form $\frac{z}{n}$ mit $z \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$. z heißt der Zähler, n der Nenner des Bruches.

Bezeichnung	Bedingung	Beispiele
Echter Bruch	z < n	$\frac{2}{5}$; $\frac{3}{17}$;
Unechter Bruch	z > n	$\frac{7}{8}$; $\frac{12}{5}$;
Stammbruch	z = 1	$\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$;
Scheinbruch	n teilt z	$\frac{12}{6}$; $\frac{25}{5}$;

- Unechte Brüche lassen sich in gemischte Zahlen umwandeln. Bsp.: $\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$
- Zu jeder Bruchzahl gehören unendlich viele verschiedene Brüche.
  Bsp.: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = ...$

b) Formänderungen von Brüchen

- Erweitern eines Bruches bedeutet: Zähler und Nenner werden mit derselben natürlichen Zahl multipliziert. $\frac{z}{n} = \frac{z \cdot k}{n \cdot k}, k \in \mathbb{N}$ Bsp.: $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$
- Kürzen eines Bruches bedeutet: Zähler und Nenner werden durch einen gemeinsamen Teiler k dividiert. $\frac{z}{n} = \frac{z:k}{n:k}, k \in \mathbb{N}$ Bsp.: $\frac{14}{21} = \frac{14:7}{21:7} = \frac{2}{3}$
- Durch Kürzen und Erweitern wird der Wert des Bruches nicht verändert.

c) Anordnung der Bruchzahlen

- Von zwei Brüchen mit gleichem Zähler ist derjenige der größere, der den kleineren Nenner hat. Bsp.: $\frac{4}{9} < \frac{4}{7}$
- Von zwei Brüchen mit gleichem Nenner ist derjenige der größere, der den größeren Zähler hat. Bsp.: $\frac{3}{7} < \frac{5}{7}$
- Brüche mit verschiedenen Nennern bringt man vor dem Vergleichen auf den Hauptnenner (= kgV aller Nenner).

d) Addition und Subtraktion von Brüchen

- Brüche mit gleichem Nenner werden addiert (subtrahiert), indem man die Zähler addiert (subtrahiert) und den Nenner beibehält.
  Bsp.: $\frac{3}{11} + \frac{4}{11} = \frac{7}{11}$, $\frac{7}{13} - \frac{3}{13} = \frac{4}{13}$
- Brüche mit verschiedenen Nennern erweitert man zuerst auf den Hauptnenner.
  Bsp.: $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$; $2\frac{2}{3} + 5\frac{5}{6} = 7\frac{4+5}{6} = 7\frac{9}{6} = 8\frac{3}{6} = 8\frac{1}{2}$;

e) Multiplizieren

$$\textbf{Bruch} \cdot \textbf{Bruch} = \frac{\textbf{Zähler} \cdot \textbf{Zähler}}{\textbf{Nenner} \cdot \textbf{Nenner}} \qquad \boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d};\ b, d \neq 0}$$

Bsp.: $\frac{3}{8} \cdot \frac{14}{15} = \frac{1 \cdot 7}{4 \cdot 5} = \frac{7}{20}$ (Vorher kürzen!)

Gemischte Zahlen müssen vor dem Multiplizieren in unechte Brüche verwandelt werden.

f) Dividieren

Bruch: Bruch = Bruch · Kehrbruch $\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}$

Bsp.: $\frac{3}{14} : \frac{6}{7} = \frac{3 \cdot 7}{14 \cdot 6} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$; $4\frac{1}{2} : 1\frac{1}{8} = \frac{9}{2} : \frac{9}{8} = \frac{9}{2} \cdot \frac{8}{9} = \frac{1 \cdot 4}{1 \cdot 1} = 4$

g) Bruchteile eines Bruches
Das Wort "von" wird nach einem Bruch durch „· " ersetzt.
Bsp.: $\frac{2}{5}$ von $\frac{3}{8}$ kg = $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8}$ kg = $\frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 4}$ kg = $\frac{3}{20}$ kg

2.<u>Dezimalbrüche</u>
Zahlen wie z.B. 1,356 heißen **Dezimalbrüche**.
Dabei bedeutet die 1. (2. , 3. ,...) Stelle hinter dem Komma Zehntel (Hundertstel, Tausendst.,...).
Die Ziffern hinter dem Komma heißen **Dezimalen.**
Bsp.: 0,04 = $\frac{4}{100} = \frac{1}{25}$; 1,234=$1\frac{234}{1000} = 1\frac{117}{500}$

a) Runden von Dezimalbrüchen
Ist die erste wegzulassende Ziffer 0,1, 2, 3, 4, so wird abgerundet, ist sie 5, 6, 7, 8, 9, so wird aufgerundet.

Bsp.: Runden auf:	1 Dez.	2 Dez.	3 Dez.
3,4564	≈3,5	≈3,46	≈3,456

b) Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen
Addition (Subtraktion) der Stellen gleichen Wertes
Bsp.: 3,76 + 4,325 = 8,085;
3,705 – 2,7354 = 0,9696

c) Multiplikation und Division mit Zehnerpotenzen
Verschieben des Kommas um so viele Stellen nach rechts (links), wie die Stufenzahl Nullen hat. Bsp.: 2,04 1000 = 2040; 14,73 : 100 = 0,1473

d) Multiplikation von Dezimalbrüchen
Die Kommas bleiben beim Multiplizieren zunächst unberücksichtigt.
Das Ergebnis erhält so viele Dezimalen, wie die Faktoren zusammen haben.
Bsp.: 9,2·0,02 = 0,184; 23,7·0,005 = 0,1185; 40·0,0001 = 0,0040;

e) Division durch eine natürliche Zahl
Vor dem Herabholen der 1. Ziffer hinter dem Komma wird im Ergebnis das Komma gesetzt.
Bsp.: 9,2 : 8 = 1,15; 13 : 4 = 3,25; 11 : 6 = 1,83333...;

f) Division durch einen Dezimalbruch
Beim **Dividieren** ändert sich der Quotientenwert nicht, wenn man bei beiden Zahlen das Komma um gleich viele Stellen in gleicher Richtung verschiebt (=gleichsinnige Komma-verschiebung) Das Komma wird beim Divisor so weit verschoben, bis er eine natürliche Zahl ist.
Bsp.: 2,56 : 1,6 = 25,6: 16 = 1,6 1,4 : 0,02 = 140 : 2 = 70; 1 : 0,001 = 1000 :1;

g) Vom Bruch zum Dezimalbruch
$\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{n}}$ = z : n ergibt einen • endlichen Dezimalbruch, wenn der Nenner des vollständig gekürzten Bruches nur die Primfaktoren 2 oder 5 enthält.
• unendlichen, periodischen Dezimalbruch sonst.

Die sich wiederholende Ziffernfolge heißt Periode.

Bsp.: $\frac{1}{3} = 0{,}333333.... = 0{,}\overline{3}$; $\frac{2}{99} = 0{,}020202... = 0{,}\overline{02}$;

$\frac{11}{30} = 0{,}36666... = 0{,}3\overline{6}$ $\frac{140}{336} = 0{,}41666... = 0{,}41\overline{6}$;

h) Vom Dezimalbruch zum Bruch

- beim endlichen Dezimalbruch:

Bsp.: $1{,}23 = 1\frac{23}{100}$; $0{,}0034 = \frac{34}{10000}$; $3{,}005 = 3\frac{5}{1000}$

- beim periodischen Dezimalbruch, wenn die Periode direkt nach dem Komma beginnt: Schreibe die Periode in den Zähler und ebenso viele Neunen in den Nenner, wie die Periode Stellen besitzt.

Bsp.: $0{,}\overline{23} = \frac{23}{99}$; $1{,}\overline{345} = 1\frac{345}{999}$; $5{,}\overline{7} = 5\frac{7}{9}$; $0{,}\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$;

i) Rechnen mit rationalen Zahlen

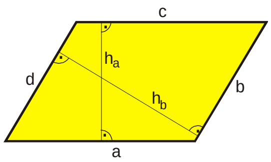
Die Menge der positiven und negativen Bruchzahlen bilden zusammen mit der 0 die Menge der rationalen Zahlen Q. Beachte: $N_0 \subset Z \subset Q$

Die Rechengesetze für die ganzen Zahlen gelten auch für die rationalen Zahlen, z.B. die Vorzeichenregeln beim Multiplizieren und Dividieren.

Bsp.:
(+1,2)·(+0,1) = +0,12; (+1,2):(+0,1) = +12;
(-1,2)·(+0,1) = -0,12; (-1,2):(+0,1) = -12;
(+1,2)·(-0,1) = -0,12; (+1,2):(-0,1) = -12;
(-1,2)·(-0,1) = +0,12; (-1,2):(-0,1) = +12;

3.Geometrie

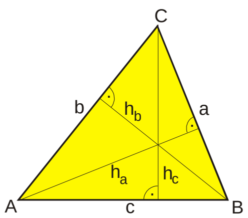
a) Flächeninhalt des Parallelogramms



$A_P = a \cdot h_a = b \cdot h_b$

A = Grundlinie mal zugehörige Höhe

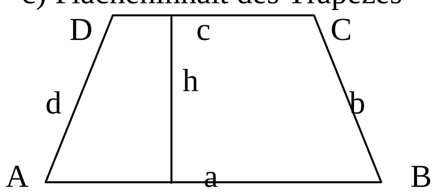
b) Flächeninhalt des Dreiecks



$A_D = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$;

A_Δ = Halbe Grundlinie mal zugehörige Höhe

c) Flächeninhalt des Trapezes



$A_T = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h$

A_T = Halbe Summe der parallelen Seitenlängen mal Höhe

d) Körper und ihr Volumen

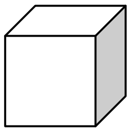
• Volumeneinheiten

Würfel der Kantenlänge	Volumen des Würfels
1 mm	1 mm³
1 cm	1 cm³
1 dm	1 dm³ = 1 Liter
1 m	1 m³

Die Umrechnungszahl zwischen benachbarten Volumeneinheiten ist 1000.

Bsp.: 1,2 dm³ = 1 200 cm³; 250dm³ = 0,250 m³; 2 dm³ 15 cm³ = 2015 cm³

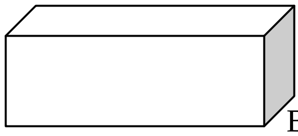
• Das Würfelvolumen



$\boxed{V_W = a^3}$

Bsp.: a = 3 cm; V = 27 cm³;

• Das Quadervolumen



$\boxed{V_Q = l \cdot b \cdot h}$

l = 5 dm; b = 3 dm; h = 2 dm; V = 30 dm³;

4. <u>Prozentrechnung</u>

• Relativer Anteil

Den Bruchteil, den ein Teil eines Ganzen am Ganzen ausmacht, nennt man (relativen) Anteil am Ganzen.

Bsp.: Der Anteil von 6 Schülern an 24 Schülern ist gleich $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

• Prozent

Relative Anteile mit dem Nenner 100 werden als „Prozent“ – geschrieben „%“ - bezeichnet.

Bsp.: 25 % ist eine andere Schreibweise für den Bruch $\frac{1}{4}$.

$$\frac{3}{8} = 0{,}375 = \frac{37{,}5}{100} = 37{,}5\%$$

Häufige Prozentsätze: $\frac{1}{20} = \frac{5}{100} = 5\%$; $\frac{1}{8} = 12{,}5\%$; $\frac{1}{5} = 20\%$; $\frac{1}{4} = 25\%$;

$\frac{1}{3} = 33\frac{1}{3}\%$; $\frac{1}{2} = 50\%$; $\frac{2}{3} = 66\frac{2}{3}\%$; $\frac{1}{1} = 100\%$;

• Grundwert, Prozentsatz, Prozentwert

Der Grundwert G ist das Ganze. Der Prozentsatz p % gibt an, welcher Anteil vom Ganzen zu bilden ist. Der Prozentwert PW gibt an, wie groß dieser Teil ist.

Bsp.:	25 %	von 24 Schülern	= 6 Schüler
	Prozentsatz p %	Grundwert G	Prozentwert PW

• Prozentsatz berechnen

Bsp.: Ein Mantel zu 160 € wird um 64 € reduziert. Wie viel Prozent beträgt der Preisnachlass?

Gegeben: G = 160 €; PW = 64 €;

Rechnung: 64 € sind $\frac{64}{160} = \frac{4}{10} = \frac{40}{100} = 40\%$ von 160 €. Der Nachlass beträgt 40 %.

$$\boxed{p\% = \frac{Pw}{G} \cdot 100\%}$$

- Prozentwert berechnen

  Bsp.: Ein Mantel zu 160 € wird um 30 % reduziert. Wie hoch ist der Preisnachlass?

  Gegeben: G = 160 €; p % = 30 %

Lösung durch Dreisatz:	100 %	↔	160 €
	1%	↔	160 € : 100 = 1,60 €
	30 %	↔	1,60 € · 30 = 48,00 €

  Der Preisnachlass beträgt 48 €.

$$\boxed{PW = \frac{G}{100} \cdot p}$$

- Grundwert berechnen

  Bsp.: Ein Mantel wird um 30 % reduziert und kostet danach um 45,00 € weniger. Wie teuer war er ursprünglich?

  Gegeben: p % = 30 %; PW = 45,00 €.

Lösung durch Dreisatz:	30 %	↔	45,00 €
	1 %	↔	45 € : 30 = 1,50 €
	100%	↔	1,50 € ·100 = 150 €.

  Der ursprüngliche Preis betrug 150 €.

- Promille

  Relative Anteile mit dem Nenner 1000 werden als „Promille“ – geschrieben „‰“ – bezeichnet.

  Bsp.: 25 ‰ ist eine andere Schreibweise für den Bruch $\frac{25}{1000}$.

  $$\frac{3}{8} = 0{,}125 = \frac{125}{1000} = 125 \text{ Promille}$$

5. <u>Zufallsexperimente</u>

- Experimente, deren Ergebnis durch den Zufall bestimmt sind, nennt man Zufallsexperimente. Hierzu gehören beispielsweise das Werfen eines Würfels, das Werfen einer Münze, das Drehen eines Glücksrades usw..
- Relative Häufigkeit

  Wirft man einen Würfel insgesamt 100-mal und tritt dabei die Augenzahl 6 19-mal auf, so sagt man, die Augenzahl 6 sei mit der **absoluten Häufigkeit** k = 19 eingetreten.

  Die relative Häufigkeit für die Augenzahl 6 ist dann $\frac{19}{100}$.

$$\text{Relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtzahl der Versuche}} = \frac{k}{n}$$

6. <u>Die Schlussrechnung (Dreisatz)</u>

Gehört zum Doppelten, Dreifachen, Vierfachen, ... einer Größe das Doppelte, Dreifache, Vierfache der anderen Größe, so kann man von einem Vielfachen der einen Größe auf das entsprechende Vielfache der anderen Größe schließen.

Bsp.: 12 kg einer bestimmten Apfelsorte kosten 22,80. Wie viel kosten 15 kg dieser Sorte?

12 kg	kosten	22,80 €	
1 kg	kostet	22,80 € : 12 = 1,90 €	(Schluss auf die Einheit)
15 kg	kosten	1,90 € ·15 = 28,50 €	