Grundwissen 7. Klasse

Algebra

1.Terme mit Variablen

a) Allgemeines

Treten in einem Term (Rechenausdruck) verschiedene Variablen auf, dann dürfen diese mit verschiedenen oder mit gleichen Zahlen belegt werden.
Tritt aber dieselbe Variable mehrmals in einem Term auf, so muss sie jeweils mit derselben Zahl belegt werden.
Die Zahlen, die für eine Variable eingesetzt werden sollen, bilden die Grundmenge **G**.
Durch das Einsetzen von Zahlen aus **G** lässt sich der jeweilige Termwert berechnen.

Bsp.: $T(x) = x^2 - 2x + 1$; **G** $= \{0; 0{,}5; -3\}$
$T(0) = 0^2 - 2\cdot 0 + 1 = 1$;
$T(0{,}5) = 0{,}5^2 - 2\cdot 0{,}5 + 1 = 0{,}25$;
$T(-3) = (-3)^2 - 2\cdot(-3) + 1 = 16$;

Abkürzende Schreibweise: $2\cdot x = 2x$; $x\cdot y = xy$; $20\cdot(x - y) = 20(x - y)$;
$(x - y)\cdot(x + y) = (x - y)(x + y)$;

b) Termumformungen

- Zwei Terme mit Variablen heißen **äquivalent**, wenn sie beide bei jeder möglichen Einsetzung für die Variablen jeweils gleiche Werte annehmen.
  Durch Umformungen nach den gültigen Rechengesetzen (Kommutativ- und Assoziativgesetze, Klammerregeln) erhält man wieder äquivalente Terme.
- Summen werden vereinfacht, indem man **gleichartige** Summanden zusammenfasst.
  Bsp.: $x - y^2 + 2x + y^2 = x + 2x - y^2 + y^2 = 3x$;
  $3abc - 5ab - 7abc - 7ab + abc = 3abc - 7abc + abc - 5ab - 7ab = -3abc - 12ab$;
- Bei Summen von ungleichartigen Gliedern, etwa $3a + 4a^2$, ist **kein** Zusammenfassen möglich.
- **Klammern auflösen**: Steht ein Pluszeichen vor der Klammer, kann man die Klammer ohne weiteres weglassen.
  Steht ein Minus vor der Klammer, lässt man die Klammer weg und kehrt gleichzeitig alle Plus- und Minusrechenzeichen in ihr Gegenteil um.
  Bsp.: $7x + (3x + 2x) = 7x + 3x + 2x = 12x$;
  $7x + (3x - 2x) = 7x + 3x - 2x = 8x$;
  $7x + (-8x + 3x) = 7x - 8x + 3x = 2x$;
  $7x + (-8x - 3x) = 7x - 8x - 3x = -4x$;

  $7x - (3x + 2x) = 7x - 3x - 2x = 2x$;
  $7x - (3x - 2x) = 7x - 3x + 2x = 6x$;
  $7x - (-8x + 3x) = 7x + 8x - 3x = 12x$;
  $7x - (-8x - 3x) = 7x + 8x + 3x = 18x$;
- Bei einer **Summe von Produkten** werden zunächst die einzelnen Produkte vereinfacht. Dann werden die gleichartigen Glieder zusammengefasst.
  Bsp.: $3x^2 + 7y^3 - (5x)^2 - (-y)^3 + 2x^3 = 3x^2 + 7y^3 - 25x^2 + y^3 + 2x^3 = -22x^2 + 8y^3 + 2x^3$;
- **Distributivgesetz**:

$$\boxed{\begin{array}{l} a\cdot(b + c) = a\cdot b + a\cdot c \\ (a + b) : c = a : c + b : c \end{array}}$$

Bsp.: $2x(3x - 5y) = 6x^2 - 10xy$;
$2x(3x - 5y + 4z) = 6x^2 - 10xy + 8xz$;
$9x^3y - 12xy = 3xy(3x^2 - 4)$; (Ausklammern)
$(18x^2y + 6xy) : 3xy = 6x + 2$;
$(18x^2y - 6xy) : 6xy = 3x - 1$

- Zwei Summen werden multipliziert, indem man jeden Summanden der ersten Klammer mit allen Summanden der zweiten Klammer multipliziert (unter Berücksichtigung der Vorzeichen) und die Produkte dann addiert.

$$\boxed{(a + b)\cdot(c + d) = ac + ad + bc + bd}$$

Bsp.: $(2x + 3y)(3 + 4x) = 6x + 8x^2 + 9y + 12xy$;
$(2x + 3y)(3 - 4x) = 6x - 8x^2 + 9y - 12xy$;
$(2x - 3y)(3 + 4x) = 6x + 8x^2 - 9y - 12xy$;
$(2x - 3y)(3 - 4x) = 6x - 8x^2 - 9y + 12xy$;

Spezielle Produkte lassen sich schneller berechnen durch

- **Die binomischen Formeln**:

$$\boxed{\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2\\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2\end{aligned}}$$

Bsp.: $(x^2 + 7)^2 = x^4 + 14x^2 + 49$;
$(1 - 2x)^2 = 1 - 4x + 4x^2$;
$(3x + 4y)(3x - 4y) = 9x^2 - 16y^2$;
$(- 4x + 5y)^2 = 16x^2 - 40xy + 25 y^2$;
$(- 3x - 5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$;

- Durch das **Ausklammern** eines Faktors wird aus einer Summe (Differenz) ein Produkt.

Bsp.: $-4a + 4 b = -4(a - b)$;
$2abx - 6aby + 4abz = 2ab(x - 3y + 2z)$;
$8x - 3y = 8(x - 0{,}375y)$;

2. Lineare Gleichungen

Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man

- auf beiden Seiten dieselbe Zahl oder denselben Term addiert oder subtrahiert oder
- beide Seiten mit derselben von Null verschiedenen Zahl multipliziert oder dividiert.

Diese Umformungen heißen **Äquivalenzumformungen**. Sie führen zu äquivalenten Gleichungen.

Bsp.:
$$\begin{aligned} 5 - 0{,}5x &= 3 + 0{,}75x; && \mid + 0{,}5x\\ 5 &= 3 + 1{,}25x; && \mid - 3\\ 2 &= 1{,}25x; && \mid : 1{,}25\\ 1{,}6 &= x; \end{aligned}$$
$\mathbb{L} = \{1{,}6\}$ falls $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$
$\mathbb{L} = \{\}$ falls $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$

Eine lineare Gleichung hat entweder genau eine Zahl oder keine Zahl (unerfüllbare Gleichung) oder alle Zahlen der Grundmenge (allgemeingültige Gleichung) als Lösung.

Bsp.:
$$\begin{aligned} 5 - 2x &= 2(2{,}5 - x); && \mathbb{G} = \mathbb{Q}\\ 5 - 2x &= 5 - 2x; && \mid -5 \quad \mid + 2x\\ 0 &= 0; \end{aligned}$$
$\mathbb{L} = \mathbb{G} = \mathbb{Q}$

3. Prozentrechnung

Begriffe: Grundwert, Prozentsatz, Prozentwert (siehe hierzu Jahrgangsstufe 6)

- Wachstumsfaktor: Wird der Grundwert um p % erhöht, so steigt er auf das $\left(1+\frac{p}{100}\right)$-fache des ursprünglichen Wertes. $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ heißt Wachstumsfaktor.

Bsp.: Der Preis wird um 9 % erhöht. Der neue Preis beträgt das 1,09-fache des alten.

- Abnahmefaktor: Wird der Grundwert um p % erniedrigt, so nimmt er auf das $\left(1-\frac{p}{100}\right)$-fache des ursprünglichen Wertes ab. $\left(1-\frac{p}{100}\right)$ heißt Abnahmefaktor.

Bsp.: Bei einer Preiserniedrigung um 12% sinkt der Preis auf das 0,88-fache des alten.

4. Arithmetisches Mittel

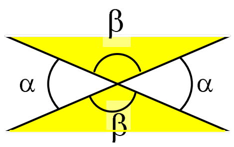
$$\text{Arithmetisches Mittel} = \frac{\text{Summe aller Einzelwerte}}{\text{Anzahl aller Einzelwerte}}$$

Bsp.: Einzelwerte: 4,5 m; 4,1 m; 3,8 m
Mittelwert: m = (4,5 m + 4,1 m + 3,8 m) : 3 = 12,4 m : 3 $\approx$4,1 m

Geometrie

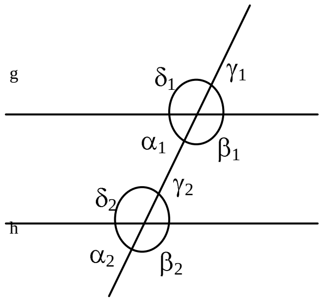
1. Sätze über Winkel

Zwei Geraden, die sich in einem Punkt schneiden, nennt man eine **Geradenkreuzung**. Nebeneinander liegende Winkel der Kreuzung heißen **Nebenwinkel**, sie ergeben zusammen stets 180^0. Gegenüberliegende Winkel heißen Scheitelwinkel. Sie sind gleich groß.



$\alpha + \beta = 180^o$
$\alpha = \alpha'; \beta = \beta';$

Doppelkreuzung:
Die Winkelpaare α_1 und α_2, β_1 und β_2, γ_1 und γ_2 sowie δ_1 und δ_2 heißen **Stufenwinkel** (F-Winkel).
α_1 und γ_2, β_1 und δ_2, γ_1 und α_2 sowie δ_1 und β_2 heißen **Wechselwinkel** (Z-Winkel).
α_1 und δ_2 sowie β_1 und γ_2 heißen **Nachbarwinkel** (Ergänzungswinkel, E-Winkel).
Stufen- und Wechselwinkel sind genau dann **gleich groß**, wenn die Geraden g und h **parallel** sind. Nachbarwinkel ergänzen sich genau dann zu 180°, wenn g und h parallel sind.



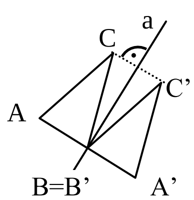
Winkel bei Dreiecken und Vierecken:
Die Summe der (Innen-)Winkel ergibt in jedem Dreieck 180°, in jedem Viereck 360°.

2. Abbildungen und Symmetrien

a) Achsenspiegelungen $P \,|_a\, P'$

Abbildungsvorschrift der Achsenspiegelung:
Bei gegebener Achse a wird jedem Punkt P der Ebene ein Bildpunkt P' auf folgende Weise zugeordnet:

- Falls $P \notin a$, liegt P' so, dass [PP'] von der Achse a rechtwinklig halbiert wird.
- Falls $P \in a$ ist, gilt P = P' (Fixpunkt) Die Spiegelachse und alle senkrecht zu ihr verlaufenden Geraden sind Fixgeraden.

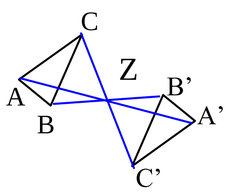


Eine Figur, die bei einer Achsenspiegelung wieder auf sich abgebildet wird, heißt achsensymmetrisch.

b) Punktspiegelungen $P \rightarrow P'$

Abbildungsvorschrift der Punktspiegelung:
Bei gegebenem Zentrum Z wird jedem Punkt P der Ebene ein Bildpunkt P' so zugeordnet:

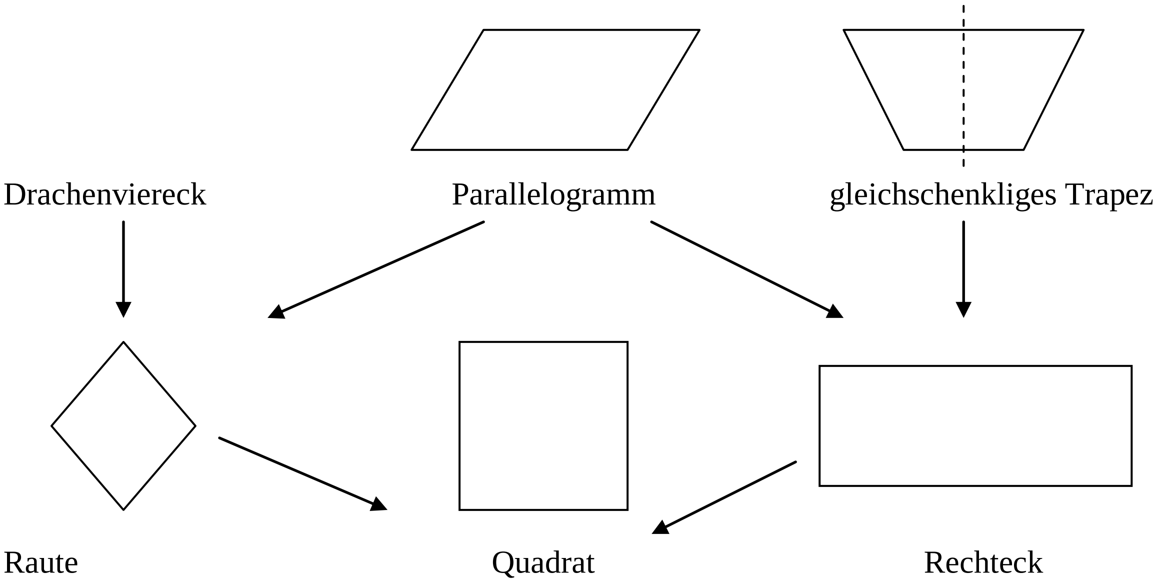
- Für $P \neq Z$ liegt P' so, dass $P' \in PZ$ und $\overline{PZ} = \overline{P'Z}$
- Für P = Z ist P' = Z (Fixpunkt). Alle Geraden durch Z sind Fixgeraden.



Eine Figur, die bei einer Punktspiegelung wieder auf sich abgebildet wird, heißt punktsymmetrisch.

3. Symmetrische Vierecke

diagonalsymmetrisch punktsymmetrisch mittensymmetrisch



4. Kongruenz

Figuren, die sich beim Aufeinanderlegen decken, heißen deckungsgleich oder kongruent.
Sind zwei Figuren F und G kongruent, so schreibt man kurz:

$$F \cong G.$$

In kongruenten Figuren sind einander entsprechende Winkel gleich groß und einander entsprechende Seiten gleich lang.

Kongruenzsätze für Dreiecke

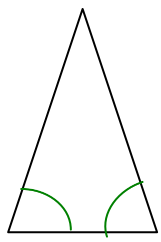
- **SSS**: Dreiecke sind kongruent, wenn sie in allen Seiten übereinstimmen.
- **SWS**: Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem Zwischenwinkel übereinstimmen.
- **WSW**:
- **SWW**: } Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen.
- **SsW**: Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen

5. Besondere Dreiecke

a) **Das gleichschenklige Dreieck**

Ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten (Schenkel) heißt gleichschenklig.
Die dritte Seite heißt Basis.
Jede der folgenden Aussagen ist gleichwertig:

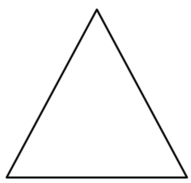
- Das Dreieck ist gleichschenklig.
- Das Dreieck ist achsensymmetrisch.
- Das Dreieck besitzt zwei gleich große Winkel.



Basis

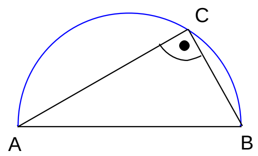
b) **Das gleichseitige Dreieck**

Ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten heißt gleichseitig.
Seine Winkel betragen jeweils 60^0.



c) **Das rechtwinklige Dreieck**

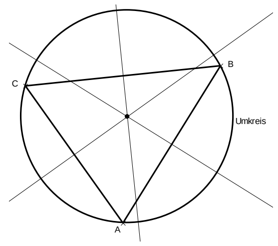
Ein Dreieck ABC hat genau dann bei C einen rechten Winkel, wenn C auf dem Halbkreis über [AB] liegt. (Thaleskreis)
Die Schenkel des rechten Winkels sind die Katheten, die Gegenseite des rechten Winkels ist die Hypotenuse (längste Seite).



6. Dreieckstransversalen

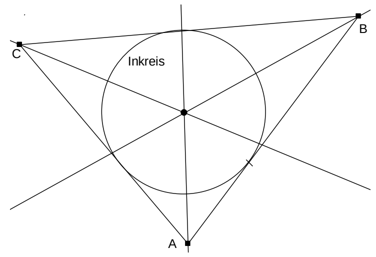
a) **Mittelsenkrechte**

Jedes Dreieck besitzt einen Umkreis. Sein Mittelpunkt ist der gemeinsame Schnittpunkt U der Mittelsenkrechten zu den Dreiecksseiten.



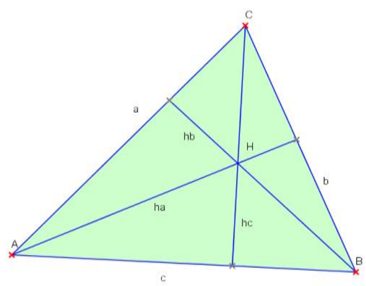
b) **Winkelhalbierende**

Jedes Dreieck besitzt einen Inkreis. Sein Mittelpunkt ist der gemeinsame Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.



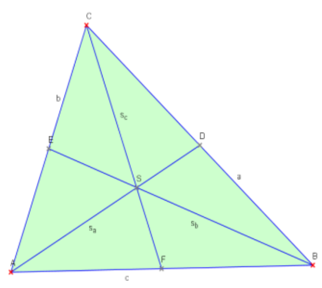
c) Höhen

In jedem Dreieck schneiden sich die Höhen in genau einem Punkt, dem Höhenschnittpunkt H.



d) **Seitenhalbierende**

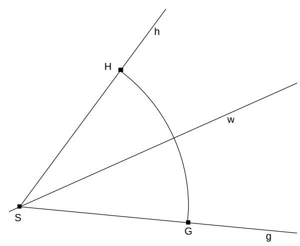
Verbindet man in einem Dreieck einen Eckpunkt mit der gegenüberliegenden Seitenmitte, so entsteht eine Seitenhalbierende.
Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im Schwerpunkt S des Dreiecks.
Sie heißen deshalb auch Schwerlinien.



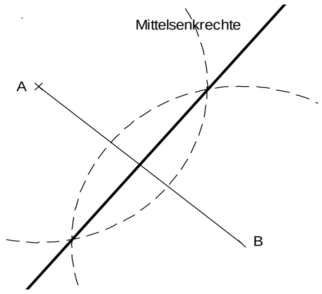
7. Konstruktionen

a) **Winkelhalbierende, Lot**

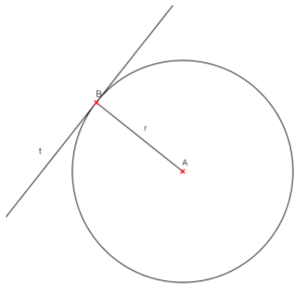
Kreis um S mit beliebigem Radius schneidet g in G und h in H.
Die Symmetrieachse m_{GH} ist die Winkelhalbierende.
Die Winkelhalbierende eines gestreckten Winkels ist das Lot zu seinen Schenkeln.



b) **Mittelsenkrechte** zu [AB]
Kreis um A und B mit Radius r.
Die Gerade durch die Schnittpunkte ist
die Mittelsenkrechte.



c) **Tangenten** in einem Punkt B eines Kreises
Die Tangente steht auf dem Berührpunktsradius
senkrecht



d) **Tangenten** von einem Punkt P außerhalb
Der Thaleskreis über der Strecke [PM]
schneidet den Kreis k(M; r) in den
Berührpunkten B_1 und B_2.